

Тема 3.1.Предикаты

Определение предикатов и логические операции над ними.

Логика предикатов – это расширение возможности логики высказываний, позволяющее строить высказывания с учетом свойств изученных объектов или отношений между ними.

Определение. Одноместным предикатом $P(x)$ называется произвольная функция переменной x , определенная на множестве M и принимающая значения из множества $\{0,1\}$.

Если в $P(x)$ вместо x подставить конкретный изученный объект a , то получится высказывание, принадлежащее алгебре высказываний, т.е. $P(a)=1$ или $P(a)=0$.

Множество M , на котором определен предикат $P(x)$, называется областью определения предиката. Множество всех $x \in M$, при которых предикат принимает значение «истина», называется множеством истинности предиката $P(x)$, т.е. $Y_p = \{x / x \in M \text{ и } P(x)=1\}$.

Пример 1:

На множестве $M = \{3,4,5,6,7,8\}$ задан предикат $P(x)$: « x – простое число».
 $Y_p = \{3,5,7\}$.

Пример 2:

Предикат $F(x)$: «Диагонали параллелограмма перпендикулярны», – определен на множестве истинности Y_F – это множество всех ромбов.

Определение 4.2. Предикат $P(x)$, определенный на множестве M , называется тождественно истинным, если $Y_p = M$, и тождественно ложным, если $Y_p = \emptyset$.

Пример 3:

- 1) Пусть $M = R$, $P(x)$: « $x^2 + 1 > 0$ » является тождественно истинным, так как $Y_p = R$.

2) $M = R$, $P(x)$: " $x^2 + 1 < 0$ " является тождественно ложным, так как $Y_P = \emptyset$.

Обобщением понятия одноместного предиката является понятие *многоместного предиката*, с помощью которого выражаются отношения между предикатами, например, " $x < y$ ", где $x, y \in Z$ – двуместный предикат $P(x, y)$.

Определение. n -местным предикатом называется всякая функция n переменных $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенная на множестве $M = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ (декартово произведение) и принимающая на этом множестве одно из двух значений: «истина» или «ложь».

n -местный предикат есть функция $Q: M \rightarrow B$, где M – произвольное множество, а $B = \{0, 1\}$.

Определение Предикат $P(x)$ является следствием предиката $Q(x)$ ($Q(x) \rightarrow P(x)$), если $Y_Q \subset Y_P$.

Определение 4.5. Предикаты $P(x)$ и $Q(x)$ равносильны ($Q(x) \leftrightarrow P(x)$), если $Y_Q = Y_P$.

Пример 4:

- 1) Предикат $P(x)$: " $x^2 - 3x + 2 = 0$ " является следствием предиката $Q(x)$: " $x - 1 = 0$ " на множестве действительных чисел, так как.
- 2) Предикаты $P(x)$: " $x^2 = 0$ " и на множестве действительных чисел являются равносильными, так как $Y_Q = \{0\}$ и $Y_P = \{0\}$; $Y_Q = Y_P$.

Логические операции над предикатами.

Пусть имеется два предиката $P(x)$ и $Q(x)$, определенные на множестве M .

Определение . Конъюнкцией двух предикатов $P(x)$ и $Q(x)$, который принимает значение «истина» при тех и только тех значениях $x \in M$, при которых каждый из предикатов принимает значение «истина», и принимает значение «ложь» во всех остальных случаях.

Областью истинности предиката $P(x) \wedge Q(x)$ является $Y_Q \cap Y_P$.

Пример 5:

$M = N$, $P(x)$: " x – четное число", $Q(x)$: " x – кратно 3", $P(x) \wedge Q(x)$: " x – четное число и кратно 3".

Определение 4.7. Дизъюнкцией двух предикатов $P(x)$ и $Q(x)$, который принимает значение «ложь» при тех и только тех значениях $x \in M$, при которых каждый из предикатов принимает значение «ложь», и принимает значение «истина» во всех остальных случаях.

Областью истинности предиката $P(x) \vee Q(x)$ является $Y_Q \cup Y_P$.

Пример 6:

Для предикатов из примера 5 $P(x) \vee Q(x)$: "число x четное или кратно 3".

Определение 4.8. Отрицанием предиката $P(x)$ называется новый предикат $\overline{P(x)}$, который принимает значение «истина» при всех значениях $x \in M$, при которых $P(x)$ принимает значение «ложь» и наоборот.

В этом случае $Y_{\overline{P}} = M \setminus Y_P$.

Пример 7:

$P(x)$: " $x > 2$ ", тогда $\overline{P(x)}$: " $x \leq 2$ ".

Определение 4.9. Импликацией $P(x)$ и $Q(x)$ называется новый предикат $P(x) \rightarrow Q(x)$, который является ложным при тех и только тех значениях $x \in M$, при которых одновременно $P(x)$ принимает значение «истина», а $Q(x)$ – значение «ложь», и принимает истинное значение во всех остальных случаях.

В этом случае $Y_{P \rightarrow Q} = Y_{\overline{P}} \cup Y_Q$.

Пример 8:

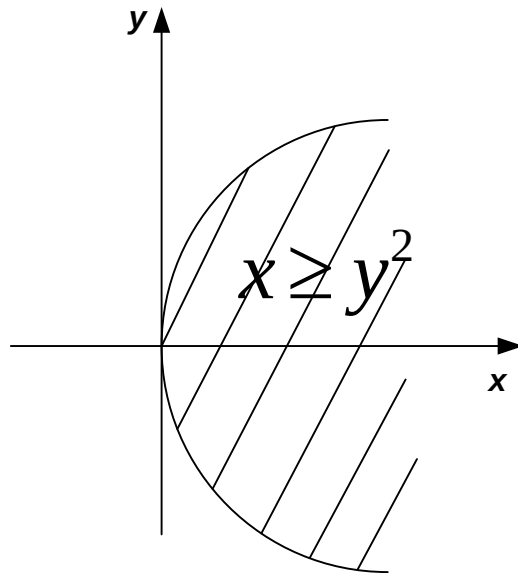
$P(x)$: " x – делится на 6", $Q(x)$: " x – кратно 3", тогда $P(x) \rightarrow Q(x)$: "если x делить на 6, то x кратно 3".

Пример 9:

Найти область истинности предиката $x - y^2 \geq 0$ и изобразить на плоскости.

Решение:

Неравенство, составляющее исходный предикат, ограничивает часть плоскости, заключенной между ветвями $x = y^2$.



Кванторные операции.

1. Квантор всеобщности.

Определение . Пусть $P(x)$ – предикат, $x \in M$. Под выражением $\forall x P(x)$ понимают высказывание, истинное, если $P(x)$ истинно для каждого элемента $x \in M$, и ложно в противном случае.

Символ $\forall$ называется квантором всеобщности. Словесное выражение $\forall x P(x)$ звучит так: «для всякого x $P(x)$ ». Переменная x в предикате $P(x)$ называется свободной, а в высказывании $\forall x P(x)$ переменная x называется связанной переменной.

Пример 10:

Установить истинность или ложность высказывания $\forall x (x^2 - 5x + 6 = 0)$, $M = R$.

$P(x)$: " $x^2 - 5x + 6 = 0$ " на множестве R принимает значение «истинно» только при $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, следовательно не является истинным на множестве R , следовательно $\forall x (x^2 - 5x + 6 = 0)$ по определению является ложным.

2. Квантор существования.

Определение . Пусть $P(x)$ – предикат, $x \in M$. Под выражением $\exists x P(x)$ понимают высказывание, истинное, если существует элемент $x \in M$, для которого $P(x)$ истинно, и ложно в противном случае.

Символ $\exists$ называется квантором существования. Словесное выражение $\exists x P(x)$ звучит так: «существует x , при котором $P(x)$ ».

Пример 11:

Установить истинность или ложность высказывания $\exists x (x^2 - 3x + 2 = 0)$, $M = R$.

$P(x)$: " $(x^2 - 3x + 2 = 0)$ ", на множестве R существует два элемента $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, для которых $P(x)$ принимает значение истинно, следовательно $\exists x P(x)$ – истинно по определению.

Кванторные операции применяются и к многоместным предикатам. Применение кванторной операции к предикату $P(x, y)$ по переменной x ставит в соответствие двухместному предикату $P(x, y)$ одноместный предикат $\forall x P(x, y)$ или $\exists x P(x)$, зависящий от y и не зависящий от x . К двухместному предикату можно применить кванторные операции по обоим переменным. Тогда получится восемь высказываний:

1. $\forall x \forall y P(x, y)$;
2. $\exists x \forall y P(x, y)$;
3. $\forall x \exists y P(x, y)$;
4. $\exists x \exists y P(x, y)$;
5. $\forall y \forall x P(x, y)$;
6. $\exists y \forall x P(x, y)$;
7. $\forall y \exists x P(x, y)$;
8. $\exists y \exists x P(x, y)$.

В общем случае изменение порядка следования кванторов изменяет смысл высказывания и его логическое значение, то есть, например, высказывания $\forall x \forall y P(x, y)$ и $\forall y \forall x P(x, y)$ различны.

Формулы логики предикатов. Равносильные формулы.

В логике предикатов пользуются следующей символикой:

1. Символы p, q, r – переменные высказывания.
2. Предметные переменные – $x, y, z, \dots$, которые пробегают значения из некоторого множества $M, x_0, y_0, z_0, \dots$ – предметные константы.
3. $P(\cdot), F(\cdot), Q(\dots)$ – предикатные символы.
4. Символы логических операций $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \leftrightarrow$.
5. Символы кванторных операций $\forall, \exists$.
6. Вспомогательные символы: скобки, запятые.

Определение 4.12. Формулой логики предикатов называется всякое выражение, символику 1-6 и удовлетворяющее следующим требованиям:

- 1) Каждое высказывание как переменное, так и постоянное является формулой;
- 2) Если $F(\dots)$ – n - местная предикатная переменная или постоянный предикат, а $x_1, x_2, \dots, x_n$ – предметная переменная или постоянная, то $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – формула.
- 3) Если A и B – формулы, то $A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B$ – тоже формулы при условии, что одна и та же предметная переменная не является в A свободной, а в B – связанной или наоборот.
- 4) Если A – формула, то $\neg A$ – тоже формула.
- 5) Если $A(x)$ – формула, то $\forall x A(x)$ и $\exists x A(x)$ являются формулами, причем если в $A(x)$ x – свободная переменная, то в $\forall x A(x)$ и $\exists x A(x)$ x будет уже связанной переменной.
- 6) Всякое слово, отличное от тех, которые названы формулами в п.1-5 не является формулой.

Пример 12:

- а) $(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \vee \exists y(\forall y P(y))$ не является формулой, так как квантор существования употреблен для уже связанной квантором всеобщности переменной y ;
- б) $P \rightarrow \forall x Q(x, y)$ – формула, x – связанная переменная, y – свободная;
- в) $\forall x P(x) \vee \forall y Q(x, y)$ не является формулой, ибо в первом логическом слагаемом x – связанная переменная, а во втором слагаемом – свободная.

Логическое значение формулы логики предикатов зависит от значений трех видов переменных: значений переменных высказываний, входящих в формулу, значений свободных предметных переменных из множества M и значений предикатных переменных. Если фиксировать значения каждого из трех видов переменных, формула логики предикатов становится высказыванием, имеющим истинное или ложное значение.

Пример 13:

Даны предикаты $A(n)$: "число n делится на 3", $B(n)$: "число n делится на 2", $C(n)$: "число n делится на 4", $D(n)$: "число n делится на 6", $E(n)$: "число n делится на 12". Указать, какие из следующих утверждений истинны, а какие ложны.

1. $\forall n(A(n) \wedge B(n) \rightarrow E(n))$. Рассмотрим составляющие части этой формулы. $A(n) \wedge B(n) \rightarrow E(n)$: "Если число n делится на 6, то оно делится на 12". При $n = 6$ импликация ложна, следовательно формула $\forall n(A(n) \wedge B(n) \rightarrow E(n))$ – ложна.
2. $\exists n(B(n) \wedge C(n) \rightarrow \overline{D(n)})$. Поступаем аналогично. $B(n) \wedge C(n)$: "Число n делится на 4". $B(n) \wedge C(n) \rightarrow \overline{D(n)}$: "Если число n делится на 4, то оно не делится на 6". Существует $n = 16$, при котором эта формула принимает значение истинно, то есть формула $B(n) \wedge C(n) \rightarrow \overline{D(n)}$ не является тождественно ложной, а тогда $\exists n(B(n) \wedge C(n) \rightarrow \overline{D(n)})$ – истинная формула.

Истинность и ложность логики предикатов может быть проверена путем приписывания смысла языковыми конструкциями, то есть их

интерпретация. Для того, чтобы определить интерпретацию, необходимо задать множество значений, которые могут принимать свободные переменные, отношения для предикатных символов.

Пример 14:

$\exists xP(x, y) \rightarrow \forall xP(x, y)$ – формула, содержащая свободную переменную y .

а) Пусть $P(x)$ интерпретируется как " $x \geq y$ " на $M[a, b]$. Если $a < y < b$, то посылка в импликации истинна, а заключение ложно и формула ложна.

Если $y = a$, то левая и правая части истинны и вся формула истинна, следовательно, формула выполнима в данной интерпретации.

б) Если $P(x, y)$ интерпретируется как " $x > y$ " на $M[a, b]$, то левая часть будет всегда истинной (при любом y), а правая – всегда ложна, следовательно, формула тождественно ложна в данной интерпретации.

Определение. Две формулы логики предикатов A и B равносильны в данной интерпретации, если на любом наборе значений свободных переменных они принимают одинаковые значения, то есть формулы выражают в данной интерпретации один и тот же предикат.

Определение. Две формулы логики предикатов A и B называются равносильными на области M , если они принимают одинаковые логические значения при всех входящих в них переменных, отнесенных к области M .

Определение. Две формулы логики предикатов A и B равносильны, если они равносильны на всякой области ($A \equiv B$).

Все равносильности алгебры высказываний будут верны, если в них вместо переменных высказываний представить формулы алгебры предикатов. Но имеются равносильности самой логики предикатов, связанные с кванторами. Пусть $A(x)$ и $B(x)$ – переменные предикаты, а C – переменное высказывание. Тогда имеют место такие формулы:

1. $\overline{\forall x A(x)} \equiv \exists x \overline{A(x)}$, читается: «высказывание "не верю, что для любого x $A(x)$ " эквивалентно высказыванию "найдется x , для которого не $A(x)$ "».

2. $\overline{\exists x A(x)} \equiv \forall x \overline{A(x)}$.

3. $\forall x A(x) \equiv \overline{\exists x \overline{A(x)}}$.
4. $\exists x A(x) \equiv \overline{\forall x \overline{A(x)}}$.
5. $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x (A(x) \wedge B(x))$.
6. $C \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x (C \wedge B(x))$.
7. $C \vee \forall x B(x) \equiv \forall x (C \vee B(x))$.
8. $C \rightarrow \forall x B(x) \equiv \forall x (C \rightarrow B(x))$.
9. $\forall x (B(x) \rightarrow C) \equiv \exists x B(x) \rightarrow C$.
10. $\exists x A(x) \vee \exists x B(x) \equiv \exists x (A(x) \vee B(x))$.
11. $C \wedge \exists x B(x) \equiv \exists x (C \wedge B(x))$.
12. $C \vee \exists x B(x) \equiv \exists x (C \vee B(x))$.
13. $C \rightarrow \exists x B(x) \equiv \exists x (C \rightarrow B(x))$.
14. $\exists x (B(x) \rightarrow C) \equiv \forall x B(x) \rightarrow C$.
15. $\exists x A(x) \wedge \exists x B(x) \equiv \exists x \exists y (A(x) \wedge B(y))$.
16. $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \equiv \forall x \forall y (A(x) \vee B(y))$.

Докажем равносильность 5.

а) Если предикаты $A(x)$ и $B(x)$ одновременно тождественно истинны, то будет истинным и предикат $A(x) \wedge B(x)$, высказывания $\forall x A(x)$, $\forall x B(x)$, $\forall x (A(x) \wedge B(x))$, то есть обе части принимают значение истины.

б) Если оба предиката будут тождественно ложными или один из них, то ложными будут предикат $A(x) \wedge B(x)$, высказывания $\forall x A(x)$, $\forall x B(x)$, $\forall x (A(x) \wedge B(x))$, то есть обе части принимают значение ложь.

Из а) и б) следует равносильность 5.

Если в формуле A заменить связанную переменную другой переменной, не входящей в эту формулу, в кванторе и всюду в области действия квантора, то получим формулу, равносильную A . Это правило называется переименование переменных связанных.

Предваренная нормальная форма. Общезначимость и выполнимость формул логики предикатов.

Формула логики предикатов имеет нормальную форму, если она содержит только операции конъюнкции, дизъюнкции и кванторные операции, а операция отрицания отнесена к элементарным формулам. Используя равносильности алгебры высказываний и логики предикатов, каждую формулу логики предикатов можно привести к нормальной форме. Среди нормальных форм особое значение имеют предваренные нормальные формы.

Определение 4.16. Предваренной нормальной формой формулы логики предикатов называется такая нормальная форма, в которой либо полностью отсутствуют кванторные операции, либо они используются после всех операций алгебры логики.

Предваренную нормальную форму можно записать $(Gx_1)(Gx_2) \dots (Gx_n)A(x_1, x_2, \dots, x_m)$, $n \leq m$, где Gx_i понимается один из кванторов $\forall x$ или $\exists x$, а формула A кванторов не содержит.

Если же все G_i равны $\forall$, то эта форма называется $\forall$ -формулой (или универсальной формулой); если же все G_i равны $\exists$, то эта форма называется $\exists$ -формулой. Если же существует i ($0 \leq i \leq n$) такое, что $G_1, G_2, \dots, G_i$ суть $\exists$, то такая форма называется скулемовской нормальной формой (или $\exists$ -формой).

Можно доказать, что всякая формула логики предикатов может быть приведена к равносильной ей предваренной форме.

Пример 15:

Привести к предваренной нормальной форме следующие формулы логики предикатов:

1. $B \equiv \overline{P \rightarrow \exists x R(x)}$;

$$\overline{p \rightarrow \exists x R(x)} \equiv \overline{p \vee \exists x R(x)} \equiv p \wedge \overline{\exists x R(x)} \equiv \forall x (p \wedge \overline{R(x)})$$

2. $B \equiv \overline{\forall x \exists y (A(x) \leftrightarrow A(y))}$

$$\begin{aligned}
\overline{\forall x \exists y (A(x) \leftrightarrow A(y))} &\equiv \exists x \exists y (\overline{A(x) \leftrightarrow A(y)}) \equiv \exists x \exists y (\overline{A(x) \leftrightarrow A(y)}) \equiv \exists x \forall y (\overline{(A(x) \rightarrow A(y)) \wedge (A(y) \rightarrow A(x))}) \equiv \\
&\equiv \exists x \forall y (\overline{(A(x) \vee A(y)) \wedge (\overline{A(y)} \vee A(x))}) \equiv \exists x \forall y (\overline{(A(x) \vee A(y)) \vee (\overline{A(y)} \vee A(x))}) \equiv \\
&\equiv \exists x \forall y (A(x) \wedge \overline{A(y)} \wedge A(y) \wedge \overline{A(x)})
\end{aligned}$$

Определение . Формула логики предикатов называется выполнимой в области M (в данной интерпретации), если существует значение переменных, входящих в эту формулу из области M , при которых формула A принимает истинные значения.

Определение . Формула A называется выполнимой, если существует область, на которой эта формула выполнима.

Определение . Формула A называется тождественно истинной (тождественно ложной) в области M , если она принимает истинные значения (ложные значения) для всех для всех значений переменных из M , входящих в эту формулу.

Определение . Формула A называется общезначимой, если она тождественно истинна во всякой области.

Общезначимую формулу называют логическим законом. Если формула A общезначима, то формула $\bar{A}$ называется ложной или противоречием.

Задача распознавания общезначимости формул логики предикатов существенно сложнее, чем формул алгебры высказываний. Она называется проблемой разрешимости. В 1936 году американец математик А. Черч доказал, что в общем виде проблема разрешимости логики предикатов не имеет алгебраического решения.

Вопросы и задания.

1. Даны предикаты $P(x)$: "Человек x живет в Гуково", $Q(x)$: "Человек x преподает в ГСТ". Прочтите словами следующие предикаты и укажите для каждого из них множество истинности:

а) $P(x) \wedge Q(x)$;

б) $P(x) \vee Q(x)$;

- в) $\overline{P(x)} \wedge Q(x)$;
- г) $P(x) \wedge \overline{Q(x)}$;
- д) $\overline{P(x)} \vee Q(x)$;
- е) $\overline{P(x)} \wedge \overline{Q(x)}$;
- ж) $P(x) \rightarrow Q(x)$.

2. Даны предикаты $A(x)$: " $9x^2 - 4 = 0$ " и $B(x)$: " $3x - 2 < -11$ ". Найдите их множества истинности, если их область определения M есть:

- а) R ;
- б) R_+ ;
- в) N .

3. Прочитайте следующие высказывания и определите, какие из них истинные, а какие ложные, считая, что все переменные пробегает множество действительных чисел:

- а) $\forall x((x^2 + 1) = x^2 + 2x + 1)$;
- б) $\forall x(x + 1 = 2)$;
- в) $\forall y(y^2 + y - 5 < 0)$;
- г) $\forall x \exists y(x + y = 7)$;
- д) $\forall x \forall y(x + y = 7)$;
- е) $(\forall x \forall y(x + y = 3)) \rightarrow (3 = 4)$;
- ж) $\forall x((x^2 > x) \leftrightarrow ((x > 1) \vee (x < 0)))$.

4. Изобразите на координатной прямой множества истинности следующих заданных на R одноместных предикатов:

- а) $|x| < 3$;
- б) $x^2 + 6x - 16 \leq 0$;
- в) $x^2 \geq 0$;
- г) $|x - 4| \geq 1$;
- д) $|x - 4| \leq |2x + 4|$;
- е) $|x| = 4$.

5. Выясните, равносильны ли следующие предикаты, если их рассматривать над множеством действительных чисел R , над множеством рациональных чисел Q , над множеством целых чисел Z и над множеством натуральных чисел N :

а) $5x^2 - 11x + 2 = 0$, $(x^2 - 3)(3x^2 - 7x + 2) = 0$;

б) $x^2 = 0$, $|x| \leq 0$;

в) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 15$, $\sqrt{x \cdot y} = 15$;

г) $2^x \cdot 2^y = 4$, $2^{x+y} = 4$;

д) $|x| = |y|$, $x = y$;

е) $x < 2$, $y < 2$.

6. Определить, является ли один из следующих предикатов, заданных на множестве действительных чисел, следствием другого:

а) $|x| < 3$, $x^2 - 3x + 2 = 0$;

б) $\sin x = 3$, $x^2 + 5 = 0$;

в) $-5 < x$, $x < 5$;

г) $x^2 < y$, $y \geq 0$;

д) $x^2 + 5x - 6 > 0$, $x + 1 = 1 + x$.

7. Определить, какие из следующих выражений являются формулами логики предикатов, а какие нет, и объяснить почему:

а) $\exists x B(x) \rightarrow \forall x B(x)$;

б) $\forall x P(x) \rightarrow P(y)$;

в) $(\forall x (P(x) \wedge Q(x))) \wedge (R(x) \rightarrow \exists y \overline{S(x)})$;

г) $\exists x (P(x) \wedge Q(x) \wedge \overline{R(x)})$;

д) $\exists x (E(x) \wedge D(x, y))$;

е) $\overline{P(x)} \wedge \forall y P(y)$.

8. Предайте следующим формам указанные интерпретации и определите истинные значения получающихся высказываний:

а) $\forall x (P(x) \rightarrow P(y))$, $M = \{\text{Петр, Павел}\}$, $P(x)$: "Имя x состоит из 5 букв, $y = \text{Петр}$ ";

б) $\forall x P(x) \rightarrow P(y)$, интерпретация та же, что и для предыдущей формулы;

в) $\overline{\forall x P(x)}$, $M = N$, $P(x)$: " $x < 2$ ";

г) $\forall x (P(x) \rightarrow P(y))$, $M = \{2, 3\}$, $P(x)$: " $\frac{2}{x}$ ", $y = 3$.

9. Являются ли общезначимыми следующие формулы логики предикатов:

а) $\exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$;

б) $\exists x \forall y (P(x) \rightarrow Q(x, y))$;

в) $(\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))) \leftrightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x))$;

г) $\overline{\exists x P(x)} \rightarrow \forall x P(x)$.

10. Привести к предваренной нормальной форме следующие формулы логики предикатов, считая P и Q бескванторными формулами:

а) $\overline{\exists x \forall y \forall u P(x, y, z, u)}$;

б) $\exists x \forall y P(x, y) \wedge \exists x \forall y Q(x, y)$;

в) $\exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \exists x \forall y Q(x, y)$;

г) $\overline{\exists x \forall y (P(x) \rightarrow Q(y))}$.

11. Привести к нормальной форме:

а) $\forall x \exists y Q(x, y) \rightarrow \exists x \forall y Q(x, y)$;

б) $\forall x (P(x) \rightarrow (\forall y Q(x, y) \rightarrow \forall z R(x, z)))$.

12. Доказать тождественную ложность формулы:

$\exists x \exists y ((P(x) \rightarrow P(y)) \wedge (P(x) \rightarrow \overline{P(y)}) \wedge P(x))$.